

మార్పు రేటు

1. సరళరేఖపై చలించే ఒక కణం t సమయంలో చలించే దూరం $s = -4t^2 + 2t$. $t = 2$ సెకన్లు, $t = 8$ సెకన్ల మధ్య దూరం సరాసరి వేగాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన. $s = -4t^2 + 2t$

$$v = \frac{ds}{dt} = -8t + 2$$

వేగం $t = 2$ వద్ద $v = \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=2}$

$$v = -64 + 2 = -62 \text{ యూనిట్లు/సెకను}$$

వేగం $t = 8$ వద్ద $v = \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=8}$

$$v = -64 + 2 = -62$$

$$\text{సరాసరి వేగం} = \frac{-62 - 14}{2} = -38 \text{ యూనిట్లు/సెకను}$$

2. $y = x^4$ అయితే $x = 2, x = 4$ ల మధ్య y లో సరాసరి మార్పు రేటును కనుక్కోండి

సాధన. $y = x^4 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 4x^3 \left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=2} = 32$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=4} = 256$$

$$\text{సరాసరి మార్పురేటు} = \frac{256 + 32}{2} = 144$$

3. సరళరేఖలో చలించే కణం కాలం t , దూరం s ల మధ్య సంబంధం $s = t^3 + 2t + 3$. $t = 4$ సెకన్ల వద్ద ఆ కణ వేగం, త్వరణం కనుక్కోండి.

సాధన. $s = t^3 + 2t + 3$

$$\frac{ds}{dt} = 3t^2 + 2, \text{ వేగం } v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 2$$

$$\text{వేగం } t \text{ వద్ద} = 4$$

$$\Rightarrow \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=4} = 48 + 2 = 50 \text{ యూనిట్లు/సెకను}$$

$$v = 3t^2 + 2$$

$$\frac{dv}{dt} = 6t \Rightarrow a = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=4} = 24 \text{ యూనిట్లు/సెకను}^2$$

4. ఒక సరళరేఖలో చలిస్తున్న కణం t కాలంలో పొందిన స్థానభ్రంశం s ను $s = 45t + 11t^2 - t^3$ గా ఇస్తే, ఆ కణం నిశ్చల స్థితికి రావడానికి పట్టే కాలాన్ని కనుక్కోండి

సాధన. $s = 45t + 11t^2 - t^3$

$$v = \frac{ds}{dt} = 45 + 22t - 3t^2$$

కణం నిశ్చలంగా ఉంటే

$$\Rightarrow v = 0 \Rightarrow 45 + 22t - 3t^2 = 0$$

$$\Rightarrow 3t^2 - 22t - 45 = 0$$

$$\Rightarrow 3t^2 - 27t + 5t - 45 = 0$$

$$\Rightarrow (3t+5)(t-9) = 0 \therefore t = 9 \text{ or } t = -\frac{5}{3}$$

$$\therefore t = 9$$

\therefore కణం 9 సెకన్ల తర్వాత నిశ్చలంగా ఉంటుంది.

5. ఒక ఘనం ఘనపరిమాణం 8 సెం.మీ.³/సెకను చొప్పున పెరుగుతుంది. ఘనం అంచు 12 సెం.మీ. ఉన్నప్పుడు ఎంత త్వరగా దీని ఉపరితల వైశాల్యం పెరుగుతుందో కనుక్కోండి.

సాధన. ఘనం యొక్క అంచు 'a' మరియు ఘన పరిమాణం v అనుకొనుము

$$v = a^3 \rightarrow (1)$$

$$\text{ఇచ్చినవి } \frac{dv}{dt} = 8 \text{ సెం.మీ}^3/\text{సెకను}, \quad a = 12 \text{ cm}$$

$$\text{ఉపరితల వైశాల్యం } S = 6a^2$$

$$\frac{ds}{dt} = 12a \frac{da}{dt} \rightarrow (2)$$

$$\text{సమీ (1) } \frac{dv}{dt} = 3a^2 \frac{da}{dt}$$

$$8 = 3(144) \frac{da}{dt}$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{8}{3(144)} \text{ cm/sec}$$

$$\frac{ds}{dt} = 12a \frac{da}{dt} = 12(12) \frac{8}{3(144)} = 144 \times \frac{8}{3(144)} = \frac{8}{3} \text{ cm}^2/\text{sec}$$

6. నిలకడగా ఉన్న నీటిలో రాయిని వదిలితే వృత్తాకార అలలు ఏర్పడతాయి. ఈ అలలు 5 సెం.మీ./సెకను చొప్పున కదులుతున్నాయి. వృత్త వ్యాసార్థం 8 సెం.మీ. ఉన్నప్పుడు అలల వైశాల్యం పెరిగే రేటు కనుక్కోండి.

సాధన. వృత్తాకార అలలు యొక్క వ్యాసార్థం 'r' అనుకోండి.

$$\text{వృత్త వైశాల్యం } A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \quad \text{ఇచ్చినది } r = 8, \frac{dr}{dt} = 5$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(8)(5)$$

$$= 80\pi \text{ cm}^2 / \text{sec}$$

7. ఒక బెలూన్‌ను గ్యాస్‌తో నింపుతుంటే అది గోళరూపంలో ఉంటుంది. దీనిని సెకనుకు 900 గన సెంటీమీటర్లతో గ్యాస్‌ను నింపుతున్నారు. గోళ వ్యాసార్థం 15 సెం.మీ. ఉన్నప్పుడు వ్యాసార్థంలో మార్పు రేటును కనుక్కోండి.

సాధన. $\frac{dv}{dt} = 900 \text{ cm} / \text{sec}$

$$r = 15 \text{ cm}$$

$$\text{గోళము యొక్క ఘనపరిమాణం } v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi 3r^2 = \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{900}{4 \times 225\pi} = \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{900}{900\pi} = \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi} \text{ cm} / \text{sec}$$

8. ఒక వస్తువును $980 \text{ m} / \text{sec}$ వేగంతో పైకి విపిరామనుకొందాం. దీని స్థానం $s = -4.9t^2 + 980t$ గా ఉంటుంది. వస్తువు చేరిన గరిష్ట ఎత్తు కనుక్కోండి.

సాధన. $s = -4.9t^2 + 980t$

$$\frac{ds}{dt} = -9.8t + 980$$

$$v = -9.8t + 980$$

$$\text{గరిష్ట ఎత్తు, } v = 0$$

$$-9.8t + 980 = 0$$

$$980 = 9.8t$$

$$\frac{980}{9.8} = t$$

$$100 = t$$

$$s = -4.9(100)^2 + 980(100)$$

$$s = -49000 + 98000$$

$$s = 49000 \text{ units}$$

9. పొడవు 8మీ., వెడల్పు 4మీ, ఎత్తు 3 మీ. గల దీర్ఘ చతురస్రాకార చేపల తొట్టి ఉందనుకొందాం. దీనిని 0.4 మీ.³/సెకను. చొప్పున నీటితో నింపుతున్నారను కొందాం. నీటి మట్టం 2.5మీ. ఉన్నప్పుడు నీటి మట్టం ఎత్తులో మార్పరేటును కనుక్కోండి.

సాధన. దీర్ఘచతురస్రాకారపు చేపల తొట్టి పొడవు $l = 9m$

దీర్ఘచతురస్రాకారపు చేపల తొట్టి వెడల్పు $b = 4m$

దీర్ఘచతురస్రాకారపు చేపల తొట్టి ఎత్తు $h = 3m$

$$\frac{dv}{dt} = 0.4m^3 / \text{sec}$$

$$v = lbh$$

$$= 8(4)(3) = 96$$

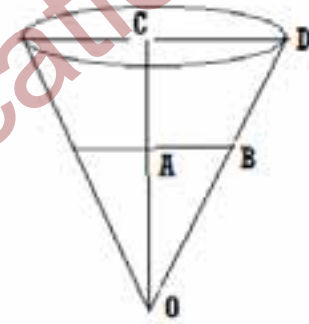
$$v = lbh$$

$$\Rightarrow \log v = \log l + \log b + \log h$$

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{0.4}{96} = \frac{1}{2.5} \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{1}{96} = \frac{dh}{dt} \text{ at } h = 2.5$$



10. ఒక విలోమ శంకువు ఆకారపు ఎత్తు 8మీ. పై వ్యాసార్థం 6 మీ. దీనిలో 2మీ³/నిమిషానికి చొప్పున నీటితో నింపినప్పుడు నీటి మట్టం 4 మీ. ఉన్నప్పుడు నీటి మట్టం పెరిగే రేటు ఎంత?

సాధన. $h = 8m = OC$

$$r = 6m = AB$$

$$\frac{dv}{dt} = 2m^3 / \text{min}$$

ΔOAB మరియు ΔOCD

సరూప త్రిభుజాలు

$$\frac{CD}{AB} = \frac{OC}{OA}$$

$$\frac{r}{6} = \frac{h}{8}$$

$$r = h \frac{3}{4}$$

$$\text{శంకువు ఘన పరిమాణం } v = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$v = \frac{1}{3} \pi h^2 \frac{9}{16} h$$

$$v = \frac{3}{16} \pi h^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{3}{16} \pi^3 h^2 \frac{dh}{dt} (\because h = 16)$$

$$2 = \frac{3}{16} \pi^3 (16) \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{2}{9\pi} = \frac{dh}{dt}$$

11. ఒక వస్తువు $C(x)$ యూనిట్లు ఉత్పత్తి చేయడానికి అయ్యే మొత్తం ఖర్చు

$C(x) = 0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$. ఆ వస్తువు 17 యూనిట్లు ఉత్పత్తి చేయడానికి ఉపాంత ఖర్చును కనుక్కోండి.

సాధన. ఉపాంత ఖర్చు m అనుకొందాం అప్పుడు

$$M = \frac{dc}{dx}$$

$$M = \frac{d}{dx} (0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000)$$

$$= (0.007)(3x^2) - (0.003)(2x) + 15$$

$x = 17$ వద్ద ఉపాంత ఖర్చు

$$(M)_{x=17} = (0.007)867 - (0.003)(34) + 15$$

$$= 6.069 - 0.102 + 15$$

$$= 20.967$$

12. x సంఖ్యలో ఒక వస్తువును అమ్ముగా వచ్చిన మొత్తం ఆదాయం $R(x) = 13x^2 + 26x + 15$.

$x = 7$ వద్ద ఉపాంత ఆదాయం కనుక్కోండి.

సాధన. ఉపాంత ఆదాయం m అనుకొందాం అప్పుడు

$$m = \frac{dR}{dx}$$

$$\text{ఇక్కడ } R(x) = 13x^2 + 26x + 15$$

$$\therefore m = 26x + 26$$

$x = 7$ వద్ద ఉపాంత ఆదాయం

$$(M)_{x=7} = 26(7) + 26$$

$$= 208$$

13. $y = 2x^2$ పై P అనే బిందువు కదులుతుంది. P యొక్క x నిరూపకం మార్పరేటు సెకనుకు 4 యూనిట్లు బిందువు $(2,8)$ వద్ద P యొక్క y ని నిరూపకం పెరిగే రేటును కనుక్కోండి.

సాధన. $y = 2x^2$ కనుక

$$\frac{dy}{dx} = 4x \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$x = 2, \text{ అయినప్పుడు } \frac{dx}{dt} = 4 \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= 4(2) \cdot 4 = 32$$

y నిరూపకము 32 యూనిట్లు/సెకను రేటుకు పెరుగుతుంది

14. ఒక ఘనం ఘనపరిమాణం 9 సెం.మీ³/సెకను చొప్పున పెరుగుతుంది. ఘనం అంచు 10 సెం.మీ. ఉన్నప్పుడు ఎంత త్వరంగా దీని ఉపరితల వైశాల్యం పెరుగుతుంది?

సాధన. ఘనం అంచు x సెం.మీ. దీని ఘనపరిమాణం V , ఉపరితల వైశాల్యం S అనుకొందాం.

$$\text{అప్పుడు } V = x^3, S = 6x^2$$

ఘనపు పరిమాణంలో పెరుగుదల రేటు 9 సె.మీ³/సెకను

$$\text{కాబట్టి } \frac{dV}{dt} = 9 \text{ సె.మీ}^3/\text{సెకను}$$

V దృష్ట్యా t అవకలనం చేస్తే

$$\frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt} \Rightarrow 9 = 3x^2 \frac{dx}{dt} \text{ వస్తుంది}$$

$$\text{అంటే } \frac{dx}{dt} = \frac{3}{x^2}$$

S ను t దృష్ట్యా అవకలనం చేస్తే

$$\frac{dS}{dt} = 12x \times \frac{dx}{dt}$$

$$= 12x \times \frac{3}{x^2} = \frac{36}{x}$$

కాబట్టి = 10 సెం.మీ. వద్ద

$$\frac{dS}{dt} = \frac{36}{10} = 3.6$$

3.6 సెం.మీ²/సెకను అవుతుంది.

15. ఒక సరళరేఖ పై చలిస్తున్న కణం, t సెకన్లలో ఒక స్థిర బిందువు నుంచి చలించిన దూరం s (సెం.మీ) మరియు $s = f(t) = 8t + t^3$ అయితే, (i) $t = 2$ సెకన్ల వద్ద కణవేగాన్ని (ii) ఆ కణం తొలివేగాన్ని (iii) $t = 2$ సెకన్ల వద్ద త్వరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన. దూరం s , కాలం t ల మధ్య సంబంధం

$$s = f(t) = 8t + t^3 \rightarrow (1)$$

$$\therefore \text{వేగం } v = 8 + 3t^2 \rightarrow (2)$$

$$\text{త్వరణం } a = \frac{d^2s}{dt^2} = 6t \rightarrow (3)$$

$$i) t = 2 \text{ సెకన్ల వద్ద వేగం } 8 + 3(4) = 20 \text{ సెం.మీ/సెకను}$$

$$ii) \text{ తొలివేగం } (t=0) 8 \text{ సెం.మీ./సెకను}$$

$$iii) t = 2 \text{ సెకన్ల వద్ద త్వరణం } 6(2) = 12 \text{ సెం.మీ/సెకను}^2$$

16. ఒక విలోమ శంకువు ఆకారపు ఎత్తు 12 సెం.మీ. ఉపరితల వ్యాసార్థం 6 సెం.మీ. దీనిని 12 సెం.మీ³/సెకను, చొప్పున నీటితో నింపినప్పుడు, నీటి మట్టం 8 సెం.మీ. ఉన్నప్పుడు నీటి మట్టం పెరిగే రేటు ఎంత?

సాధన. t సెకన్ల వద్ద నీటిమట్టం ఎత్తు OC అనుకోండి

త్రిభుజాలు OAB, OCD లు సరూప త్రిభుజాలు కాబట్టి

$$\frac{CD}{AB} = \frac{OC}{OA} \quad OC = h, CD = r \text{ అనుకొందాం}$$

$$\text{దత్తాంశం నుంచి } AB = 6 \text{ సెం.మీ. } OA = 12 \text{ సెం.మీ.}$$

$$\frac{r}{6} = \frac{h}{12} \text{ అంటే } r = \frac{h}{2} \rightarrow (1)$$

శంకువు ఘనపరిమాణం V అనుకొంటే,

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \rightarrow (2)$$

$$\text{సమీకరణం (1) నుంచి, } V = \frac{\pi h^3}{12} \rightarrow (3)$$

సమీకరణం (3)ను t దృష్ట్యా అవకలనం చేస్తే

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{4} \cdot \frac{dh}{dt} \text{ వస్తుంది.}$$

$$\text{కాబట్టి } \frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2} \frac{dV}{dt}$$

$h = 8$ సెం.మీ. వద్ద నీటి మట్టం ఎత్తు పెరిగే రేటు

$$\left(\frac{dh}{dt} \right)_{h=8} \text{ అంటే } \left(\frac{1}{\pi} \right) \frac{4}{8^2} (12) = \frac{3}{4\pi} \text{ సెం.మీ/సెకను}$$

కాబట్టి నీటిమట్టం ఎత్తు 8 సెం.మీ. ఉన్నప్పుడు నీటిమట్టం ఎత్తు పెరిగే రేటు $\frac{3}{4\pi}$ సెం.మీ./సెకను

17. సరళరేఖ పై $s = f(t) = 4t^3 - 3t^2 + 5t - 1$ సంబంధాన్ని పాటిస్తూ ఒక కణం చలిస్తుంది. ఇక్కడ దూరం s ని మీటర్లలో, కాలం t ని సెకన్లలో కొలిచాం. ఆ కణం వేగం, త్వరణం కనుక్కోండి. త్వరణం ఎప్పుడు సున్నా అవుతుంది.

సాధన. $f(t) = 4t^3 - 3t^2 + 5t - 1$ కనుక t సెకను వద్ద

ఆ కణం వేగం

$$v = \frac{ds}{dt} = 12t^2 - 6t + 5$$

$$\text{త్వరణం } a = \frac{d^2s}{dt^2} = 24t - 6$$

$24t - 6 = 0$ అయితే త్వరణం సున్నా అవుతుంది

$$\text{అంటే } t = \frac{1}{4}$$

$t = \frac{1}{4}$ సెకన్ల వద్ద త్వరణం సున్నా అవుతుంది.

www.sakshieducation.com