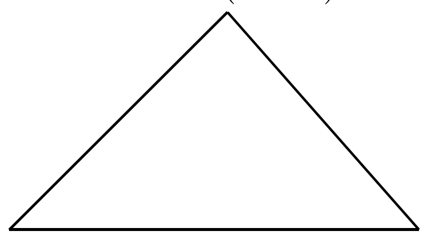
దిక్ కొసైన్‌లు, దిక్ సంఖ్యలు

1. $(3,5,-4),(-1,1,2),(-5,-5,-2)$ శీర్షాలుగా గల త్రిభుజం భుజాల దిక్ కొసైన్లు రాయండి.

సాధన. $A(3,5,-4),(-1,1,2),C(-5,-5,-2)$ లు ΔABC లు త్రిభుజ శీర్షాలు



d,r,s యొక్క AB లు $-1-3,1-5,2+4=-4,-4,6$

తో భాగించగా $\sqrt{16+16+36}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$

AB యొక్క D,C లు $\frac{-4}{2\sqrt{17}}-\frac{-4}{2\sqrt{17}},\frac{6}{2\sqrt{17}}$

i.e., యొక్క $-4,-6,-4$ లు

తో భాగించగా $\sqrt{16+16+36}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$

BC యొక్క D,C లు $\frac{-4}{2\sqrt{17}},\frac{-6}{2\sqrt{17}},\frac{-4}{2\sqrt{17}}$

ie., $\frac{-2}{\sqrt{17}},\frac{-3}{\sqrt{17}},\frac{-2}{\sqrt{17}}$

CA యొక్క d.rs $3+5,5+5,-4+2=8,10,-2$

తో భాగించగా $\sqrt{64+100+4}=\sqrt{168}=2\sqrt{42}$

CA యొక్క D.C లు $\frac{8}{2\sqrt{42}},\frac{5}{\sqrt{42}},\frac{-1}{\sqrt{42}}$

2. ఒక రేఖ దిక్ సంఖ్యలు $(3,4,0)$ అయితే దాని దిక్ కొసైన్లు, ఇంకా ఆ రేఖ నిరూపకాక్షాలతో చేసే కోణాలు కనుక్కోండి.

సాధన. రేఖ నిష్పత్తి దిక్ సంఖ్యలు $(3,4,0)$

$\sqrt{9+16+0}=5$ తో భాగించగా

రేఖ దిక్ కొసైన్లు $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\right)$

α,β,γ లు ఈ రేఖ నిరూపకాక్షాలతో చేసే కోణాలు అయితే,

www.sakshieducation.com

$\cos\alpha = \frac{3}{5}\cos\beta = \frac{4}{5}\cos\gamma = 0$

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right), \beta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right), \gamma = \frac{\pi}{2}$

రేఖ నిరూపకాక్షాలతో చేసే కోణం

$\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right), \frac{\pi}{2}$

3. ఒక సరళరేఖ X, Y, Z అక్షాల ధన దిశలలో α, β, γ కోణాలు చేస్తుంటే $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$ విలువ ఎంత ?

సాధన: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$1 - \sin^2\alpha + 1 - \sin^2\beta + 1 - \sin^2\gamma = 1$

$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 3 - 1 = 2$

4. $l - 5m + 3n = 0$, $7l^2 + 5m^2 - 3n^2 = 0$ సమీకరణాలను తృప్తి పరిచేటట్లుగా రెండు రేఖల దిక్ కోసైన్లు కనుక్కోండి.

సాధన: దత్తాంశం $l - 5m + 3n = 0$

$\Rightarrow l = 5m - 3n$ ....(1)

$7l + 5m^2 - 3n^2 = 0$ ....(2)

(2) లో l విలువ ప్రతిక్షేపించగా

$7(5m - 3n)^2 + 5m^2 - 3n^2 = 0$

$7(25m^2 + 9n^2 - 30mn) + 5m^2 - 3n^2 = 0$

$175m^2 + 63n^2 - 210mn + 5m^2 - 3n^2 = 0$

$180m^2 - 210mn + 60n^2 = 0$

30 తో భాగించగా

$6m^2 - 7mn + 2n^2 = 0$

$(3m - 2n)(2m - n) = 0$

$3m = 2n$ లేదా $2m = n$

సందర్భం (i): $3m = 2n_1 \Rightarrow \frac{m_1}{2} = \frac{n_1}{3}$

మరియు $m_1 = \frac{2}{3}n_1$

www.sakshieducation.com

(1) నుండి $l_1 = 5m_1 - 3n_1 = 5\frac{10}{3}n_1 3n_1$

$= \frac{10n_1 - 9n_1}{3} = \frac{n_1}{3}$

$\therefore \frac{l_1}{1} = \frac{m_1}{2} = \frac{n_1}{3}$

మొదటి రేఖ $d.r$ లు (1, 2, 3)

$\sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ తో భాగించగా

మొదటి రేఖ $d.c$ లు $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$

సందర్భము (ii): $2m_2 = n_2$

(1) నుండి $l_2 - 5m_2 + 3n_2 = 0$

$l_2 - 5m_2 + 6n_2 = 0$

$-l_2 = m_2$

$\therefore \frac{l_2}{-1} = \frac{m_2}{1} = \frac{n_2}{2}$

రెండవ రేఖ $d.r$ లు −1, 1, 1

$\sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$ తో భాగించగా

రెండవ రేఖ $d.c$ లు $\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

5. O మూలబిందువు $P(2,3,4)$, $Q(1,k,1)$ బిందువులు $\overleftrightarrow{OP} \perp \overleftrightarrow{OQ}$ అయ్యేటట్లుంటే k విలువ ఎంత ?

సాధన: OP యొక్క $d.r$ లు 2, 3, 4

OQ యొక్క $d.r$ లు $1, k, 1$

OP, OQ లు లంబంగా ఉన్నాయి.

$\Rightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

$2 + 3k + 4 = 0$

$3k = -6$

$k = -2$

www.sakshieducation.com

6. రెండు రేఖల దిక్ కోసైన్లు $l+m+n=0$, $l^2+m^2+n^2=0$. సమీకరణమును తృప్తి పరిస్తే వాటి మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: దత్తాంశం ప్రకారం

$l+m+n=0$....................(1)

$l^2+m^2+n^2=0$....................(2)

(1) నుండి $l=-(m+n)$

(2) లో ప్రతిక్షేపించగా

$(m+n)^2+m^2-n^2=0$

$m^2+n^2+2mn+m^2-n^2=0$

$2m^2+2mn=0$

$2m(m+n)=0$

$\therefore m=0$ లేదా $m+n=0$

సందర్భము (i) : $m=0$, (1) లో ప్రతిక్షేపించగా $l+n=0$

$$l=-n \Rightarrow \frac{l}{1}=\frac{n}{-1}$$

l_1 రేఖ $D.R$ లు $(1, 0, -1)$

సంధర్భము (ii) :

$$m+n=0 \Rightarrow m-n \Rightarrow \frac{m}{1}=\frac{n}{-1}$$

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా $l=0$

l_2 యొక్క DR లు $(0, 1, -1)$

ఈ రేఖల మధ్య కోణం θ అయితే

$$\cos\theta=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$=\frac{|0+0+1|}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$$

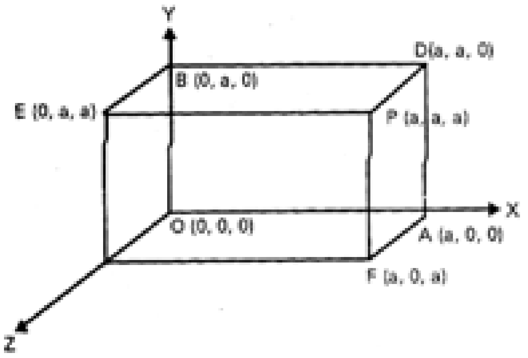
$$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$$

www.sakshieducation.com

7. **ఒక కిరణం, సమఘనం యొక్క నాలుగు కర్ణాలతో** $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ **కోణాలు చేస్తే** $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta$ **విలువ ఎంత ?**

సాధన: ఘనము యొక్క భుజవ పొడవు ఒక శీర్షాన్ని మూల బిందువుగాను, $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ భుజాలను నిరూపకాక్షాలుగా తీసుకుందాం

$\overline{OP}, \overline{CD}, \overline{AE}, \overline{BF}$ లు కర్ణాలు. వీటి దిక్ సంఖ్యలు వరుసగా (a,a,a), $(a,a,-a)$, $(-a,a,a)$, $(a,-a,a)$.



దత్తరేఖ దిక్ కోసైనులు (l, m, n) మరియు ఈ రేఖ ఘనము యొక్క కర్ణాలతో α, β, γ మరియు δ కోణాలు చేస్తుంది అనుకుందాం.

$$\cos\alpha = \frac{|a \times l + a \times m + a \times n|}{\sqrt{a^2 + a^2 + a^2}} = \frac{|l + m + n|}{\sqrt{3}}$$

ఇదే విధంగా $\cos\beta = \dfrac{|l + m - n|}{\sqrt{3}}$

$\cos\gamma = \dfrac{|-l + m + n|}{\sqrt{3}}$ మరియు

$$\cos\delta = \frac{|l - m + n|}{\sqrt{3}}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta$$

$$\frac{1}{3}\{|l + m + n|^2 + |l + m + -n|^2 + |-l + m + n|^2 + |l - m + n|^2\}$$

$$\frac{1}{3}\left[(l + m + n)^2 + (l + m - n)^2 + (-l + m + n)^2 + (l - m + n)^2\right]$$

$$\frac{1}{3}\left[4(l^2 + m^2 + n^2)\right] = \frac{4}{3} (\text{since } l^2 + m^2 + n^2 = 1)$$

www.sakshieducation.com

8. $3l+m+5n=0$, $6mn-2nl+5lm=0$

సమీకరణాలలో సూచించబడే దిక్ కోసైన్లు గల రేఖల మధ్య కోణం కనుక్కోండి.

సాధన: దత్తాంశం $3l+m+5n=0$.....................(1)

$6mn-2nl+5lm=0$................(2)

(1) నుండి, $m=-(3l+5n)$

(2) లో ప్రతిక్షేపించగా

$-6n(3l+5n)-2nl-5l(3l+5n)=0$

$-18\ln-30n^2-2nl-15l^2-25\ln=0$

$-15l^2-45\ln-30n^2=0$

$l^2+3\ln+2n^2=0$

$(l+2n)(l+n)=0$

$l+2n=0$ లేదా $l+n=0$

సందర్భం (i) :

$l_1+n_1=0 \Rightarrow n_1=-l_1$; $\Rightarrow \frac{l_1}{1}=\frac{n_1}{-1}$

కాని

$m_1=-(3l_1+5n_1)=-(-3n_1+5n_1)=-2n_1$

$\therefore \frac{m_1}{+2}=\frac{n_1}{-1}$

$\therefore \frac{l_1}{1}=\frac{m_1}{2}=\frac{n_1}{-1}$

l_1 యొక్క $D.R$ $(1, 2, -1)$

సందర్భం (ii) : $l_2+2n_2=0$

$l_2=-2n_2 \Rightarrow \frac{l_2}{-2}=\frac{n_2}{1}$

$m_2=-(3l_2+5n_2)=-(-6n_2+5n_2)=n_2$

$\frac{m_2}{1}=\frac{n_2}{1}$

$\therefore \frac{l_1}{-2}=\frac{m_2}{1}=\frac{n_2}{1}$

l_2 యొక్క $D.R$ లు $(-2, 1, 1)$

l_1, l_2 రేఖల మధ్య కోణం 'θ' అనుకుందాం

$$\cos\theta=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

www.sakshieducation.com

$$=\frac{|1(-2)+2.1+(-1).1|}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{4+1+1}}$$

$$=\frac{1}{6}\Rightarrow \theta=\cos^{-1}(1/6)$$

9 రెండు సరళరేఖలు దిక్ కోసైన్లు $l+m+n=0$ $mn-2nl-2lm=0$ **సమీకరణాలు తృప్తి పరిస్తే, ఆ దిక్ కోసైన్లు ఏవి ?**

సాధన: దత్తాంశం $l+m+n=0$....................(1)

$mn-2nl-2lm=0$................(2)

(1) నుండి $l=-(m+n)$

(2) లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$mn\pm 2n(m+n)+2m(m+n)=0$

$mn+2mn+2n^2+2m^2+2mn=0$

$2m^2+5mn+2n^2=0$

$(2m+n)(m+2n)=0$

$2m=-n \quad m=-2n$

సందర్భం (i) **:** $2m_1=-n_1$

(1) నుండి $l_1=-m_1-n_1$

$=-m_1+2m_1=m_1$

$\frac{l_1}{1}=\frac{m_1}{1}=\frac{n_1}{-2}$

మొదటి రేఖ దిక్ సంఖ్యలు 1, 1, -2

ఈ రేఖ దిక్ కోసైన్లు $\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}$

సందర్భం (ii) : $m_2=-2n_2$

(1) నుండి $l_2=-m_2-n_2=+2n_2-n_2=n_2$

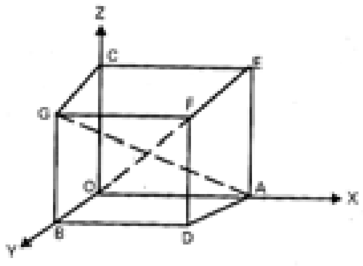
$\frac{l_2}{1}=\frac{m_2}{2}=\frac{n_2}{1}$

రెండవ రేఖ దిక్ సంఖ్యలు 1, -2, 1

రెండవ రేఖ దిక్ కోసైన్లు $\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}$

www.sakshieducation.com

10.. ఒక సమఘనం యొక్క రెండు కర్ణాల మధ్య కోణం కనుక్కొండి.



సాధన: సమఘనం ఒక శీర్షం 'O' గా తీసుకోవాలి.

OA, OB, OC లను నిరూపకాక్షాలుగా తీసుకుందాం

$OA = OB = OC = a$ అనుకుందాం

నాలుగు కర్ణాలు $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{DE}$ మరియు $\overrightarrow{BC}$ సమఘనము శీర్షాల నిరూపకాలు

$O(0,0,0), A(a,0,0), B(0,a,0), C(0,0,a)$

$F(a,a,a), D(a,a,0), E(a,0,a), G(0,a,a)$

OF యొక్క దిక్ సంఖ్యలు

$(a,-0, a-0, a-0) = (a,a,a)$

AG యొక్క దిక్ సంఖ్యలు

$(0-a, a-0, a-0) = (-a,a,a)$

OF, AG ల మధ్య కోణం θ అనుకుంటే

$$\cos\theta = \frac{|a(-a) + a.a + a.a|}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}\sqrt{a^2+a^2+a^2}}$$

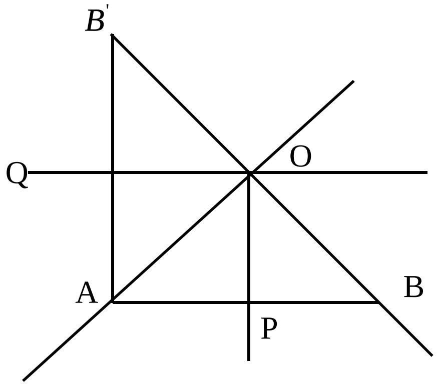
$$= \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

ఇదే విధంగా ఏ రెండు కర్ణాల మధ్య కోణాలు

$\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ కనుక్కోగలము.

www.sakshieducation.com

11. $(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2)$ లు రెండు ఖండించుకొనే రేఖల దిక్ కొసైన్లయితే, వాటి మధ్య కోణ సమద్విఖండన రేఖల దిక్ కొసైన్లు $l_1 \pm l_2, m_1 \pm m_2 n_1 \pm 2$ లకు అనుపాతంలో ఉంటాయని చూపండి.



సాధన. OA ,OB లు దత్త రేఖలు

A,B లు O నుండి యూనిట్ దూరంలో గల బిందువు

A నిరూపకాలు (l_1, m_1, n_1)

B నిరూపకాలు (l_2, m_2, n_2)

AB మధ్యబిందువు P

P నిరూపకాలు $\left(\frac{l_1 + l_2}{2}, \frac{m_1 + m_2}{2}, \frac{n_1 + n_2}{2}\right)$

$\therefore$ OP రేఖ $\angle AOB$ కోణ సమద్విఖండన రేఖ

OP యొక్క D.R లు $l_1 + l_2, m_1 + m_2, n_1 + n_2$

$OB' = OB = 1$ అయ్యే విధంగా B బిందువు OB మీద వుంది.

B' నిరూపకాలు $(-l_2 - m_2, -n_2)$

AB' మధ్యబిందువు Q

Q నిరూపకాలు $\left(\frac{l_1 - l_2}{2}, \frac{m_1 - m_2}{2}, \frac{n_1 - n_2}{2}\right)$

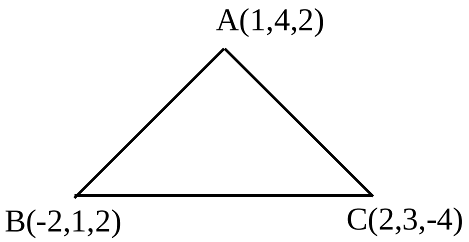
OQ రేఖ $\angle AOB$

OQ యొక్క D.Rs $l_1 - l_2, m_1 - m_2, n_1 - n_2$.

www.sakshieducation.com

12.ఒక త్రిభుజం శీర్షాలు వరుసగా $A(1,4,2), B(-2,1,2), C(2,3,-4)$, అయితే A,B,C కనుక్కోండి.

సాధన.



$A(1,4,2), B(-2,1,2), C(2,3,-4)$ లు OABC

యొక్క త్రిభుజ శీర్షాలు.

AB యొక్క D.R లు 3,3, i.e., 1,1,0

BC యొక్క D.R లు - 4,-2,6 i.e., 2,1,-3

AC యొక్క D.R లు -1,1,6

$$\cos \underline{|ABC} = \frac{|1.2+1.0+0(-3)|}{\sqrt{1+1}\sqrt{4+1+9}} = \frac{3}{\sqrt{28}} = \frac{3}{2\sqrt{7}}$$

$$\angle B = \cos^{-1}\left(\frac{3}{2\sqrt{7}}\right)$$

$$\cos BCA = \frac{1(-1)+1.1_(-36)}{\sqrt{4+1+9}\sqrt{1+1+36}}$$

$$= \frac{19}{\sqrt{19}\sqrt{28}} = \frac{\sqrt{19}}{28}, C = \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{19}{28}}\right)$$

$$\cos CAB = \frac{|-1.1+1.1+6.0|}{\sqrt{1+1+36}\sqrt{1+1+0}} = 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{\pi}{2}$$

www.sakshieducation.com